บทที่ 6 การนับ

Waranyu Wongseree

Chitralada Technology Institute

บทนำ

คณิตศาสตร์เชิงการจัด (Combinatorics) เป็นทฤษฎีที่มีความสำคัญอันหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่องโดยมีการคิดค้นขึ้นในช่วงศตวรรษที่สิบเจ็ดเพื่อใช้ในการศึกษาเรื่องเกมส์การพนัน

การแจงนับ (Enumeration) หมายถึงการนับสิ่งต่างๆ ที่มีเงื่อนไขตามต้องการเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหาในหลากหลายรูปแบบ เช่น

- การวิเคราะห์ความซับซ้อนของอัลกอริทึม
- การออกแบบหมายเลขโทรศัพท์หรือ Internet protocol Addresses
- ในปัจจุบันกระบวนการนับยังมีความสำคัญต่อคณิตศาสตร์ชีววิทยา เช่น การเรียงลำดับ DNA
- และเทคนิคการนับต่างๆ ยังเป็นรากฐานสำคัญต่อการวิเคราะห์ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ ที่น่าสนใจต่างๆอีกด้วย

การนับ
Counting

1. การนับพื้นฐาน (The Basics of Counting)
2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ (Permutations and Combinations)
3. ทฤษฎีบททวินาม (The Binomial Theorem)

1. การนับพื้นฐาน

ตัวอย่างของปัญหาการนับอย่างง่ายแบบหนึ่งคือระบบการนับจำนวนรหัสลับ (Password) ของระบบคอมพิวเตอร์ รหัสลับของผู้ใช้จะถูกกำหนดว่ามีได้มากที่สุดกี่ตัวโดยแต่ละตัวอาจเป็นตัวเลขหรือตัวอักษรก็ได้ โดยรหัสลับของผู้ใช้จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตัว

เทคนิคในการนับจำนวนของรหัสลับที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นรูปแบบหนึ่งของปัญหาการนับ (Counting problems)

การทำงานทางด้านวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ปัญหาการนับถูกพบได้ทั่วไป ยกตัวอย่างเช่น การนับจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลการทดลองและการนับผลลัพธ์ที่ต้องการทั้งหมด เพื่อคำนวณหาความน่าจะเป็นของการทดลองนั้นๆ

1. การนับพื้นฐาน

เทคนิคพื้นฐานของการนับประกอบด้วยกฎการรวม (The Sum Rule) และกฎการประกอบ (The Product Rule) โดยมีกฎการหักออก (The Subtraction Rule) และกฎการแบ่ง (The Division Rule) เป็นเทคนิคที่เพิ่มเติมเพื่อให้กฎการรวมและกฎการประกอบสามารถประยุกต์ใช้งานได้ครอบคลุมมากยิ่งขึ้น

นิยามกฎการรวม (The Sum Rule)

กำหนดให้การทำงานอย่างหนึ่งมีวิธีการทำงานทั้งหมด 2 ขั้นตอน
โดยขั้นตอนแรกมีวิธีการทำงานทั้งหมด n_1 วิธี
และขั้นตอนที่สองมีวิธีการทำงานทั้งหมด n_2 วิธี
ซึ่งการทำงานทั้ง 2 ขั้นตอนไม่สามารถทำได้ในเวลาเดียวกัน แล้ว
การทำงานนี้จะมีวิธีการทำงานทั้งหมด $n_1 + n_2$ วิธี

ตัวอย่าง นักเรียนสามารถเลือกโครงงานคอมพิวเตอร์จากหนึ่งในสามรายการ รายการทั้งสามมีจำนวนโครงงาน 23, 15 และ 19 โครงงานตามลำดับ โดยที่ไม่มีโครงงานใดซ้ำกันเลย

วิธีทำ

นักเรียนสามารถเลือกโครงงานได้จากรายการแรก หรือรายการที่สอง หรือรายการที่สาม เนื่องจากไม่มีโครงงานซ้ำกัน จึงสามารถใช้ กฎการบวก ได้ว่า 23 + 15 + 19 = 57

ดังนั้นนักเรียนมี 57 วิธี ที่จะเลือกโครงงานหนึ่งโครงงานจากสามรายการนี้

ทฤษฎีบท กฎการรวมรูปทั่วไป

สำหรับกฎการรวมนี้ของงานที่มีขั้นตอนในการทำงานมากกว่า m ขั้นตอนสมมุติให้งานหนึ่งมีขั้นตอนการทำงานเป็น $T_1, T_2, \cdots, T_m$ ขั้นตอนและแต่ละขั้นตอนมีวิธีในการทำงานเป็น $n_1, n_2, \cdots, n_m$ วิธีตามลำดับ ดังนั้นวิธีการทำงานที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ วิธี

ตัวอย่าง จงหาค่าของ k เมื่อประมวลผลอัลกอริทึมต่อไปนี้

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    k := k + 1
for i_2 := 1 to n_2
    k := k + 1
        .
        .
        .
for i_m := 1 to n_m
    k := k + 1
```

ตัวอย่าง จงหาค่าของ k เมื่อประมวลผลอัลกอริทึมต่อไปนี้

<u>วิธีทำ</u> ค่า k เริ่มต้นที่ $k = 0$ อัลกอริทึมประกอบด้วยการทำงานวนรอบ m รอบ

ให้ T_i คือการทำงานของ **for** $i = 1$ **to** n_i หรือการเพิ่มค่าของ k ขึ้นไปอีก n_i

ดังนั้น T_1 ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_1

T_2 ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_2

$\vdots$

T_m ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_m

จะได้ค่าของ $k = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$

กฎการรวม (The Sum Rule)

กฎการรวมสามารถนิยามในรูปแบบของเซตได้โดยหากกำหนดให้ $A_1, A_2, \cdots, A_m$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่มีส่วนร่วมทุกคู่ (Pairwise disjoint finite sets) หรือ $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \varnothing$ ดังนั้นจำนวนสมาชิกของการร่วม (Union) เซต A_i โดยที่ $i = 1,2,\cdots,m$ ทั้งหมดเข้าด้วยกันจะมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนสมาชิกแต่ละเซต A_i

กฎการรวม (The Sum Rule)

หากกำหนดให้ $|A_i|$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A_i แล้วจะได้

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots |A_m| \text{ เมื่อ } \bigcap_{i=1}^{m} A_i = \varnothing$$

จะเห็นได้ว่าจากการนิยามด้วยเซตนี้ สมาชิกของแต่ละเซตจะไม่มีค่าซ้ำกัน (จาก $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \varnothing$) ทำให้การคำนวณหาจำนวนสมาชิกของการร่วม (Union) เซต A_i สอดคล้องกับกฎการรวมเช่นเดียวกัน

นิยามกฎผลคูณ (The Product Rule)

กำหนดให้การทำงานอย่างหนึ่งมีวิธีการทำงานทั้งหมด 2 ขั้นตอน
โดยขั้นตอนแรกมีวิธีการทำงานทั้งหมด n_1 วิธี
และขั้นตอนที่สองมีวิธีการทำงานทั้งหมด n_2 วิธี
ซึ่งการทำงานทั้ง 2 ขั้นตอน จะต้องทำงานขั้นตอนแรกก่อนทำงานขั้นตอนที่สองแล้ว
การทำงานนี้จะมีวิธีการทำงานทั้งหมด $n_1 n_2$ วิธี

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งมีห้องทำงานทั้งหมด 12 ห้องและมีพนักงาน 2 คน มีกี่วิธีในการจัดห้องทำงานให้กับพนักงานคนละห้อง

วิธีทำ

หากเลือกกำหนดห้องทำงานให้กับพนักงานคนแรกก่อน จะเลือกได้ทั้งหมด 12 ห้องและจะเหลือห้องสำหรับพนักงงานอีกคน 11 ห้อง ดังนั้นการจัดห้องทำงานจะทำได้ทั้งหมด 12x11 = 121 วิธี

ตัวอย่าง เก้าอี้นั่งในโรงละครมีป้ายติดอยู่ที่ด้านหลังเก้าอี้ โดยป้ายนี้จะประกอบด้วยตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ภาษาอังกฤษ ตัวอักษรตามด้วยตัวเลขที่แตกต่างกัน 100 ค่า จะมีป้ายที่แตกต่างกันกี่รูปแบบ

วิธีทำ

$26 \times 1000 = 2600$ แบบ

ตัวอย่าง หากคอมพิวเตอร์แต่ล่ะเครื่องมีพอร์ตในการส่งข้อมูลทั้งหมด 24 พอร์ต Local Area Network: LAN ประกอบด้วยคอมพิวเตอร์ทั้งหมด 32 เครื่อง จะมีจำนวนพอร์ตทั้งหมดเท่าไร

วิธีทำ

32 x 24 = 768 พอร์ต

ทฤษฎีบท กฎการคูณรูปทั่วไป

สำหรับกฎผลคูณนี้ของงานที่มีขั้นตอนในการทำงานมากกว่า m ขั้นตอนสมมุติให้งานหนึ่งมีขั้นตอนการทำงานเป็น $T_1, T_2, \cdots, T_m$ ขั้นตอนและแต่ละขั้นตอนมีวิธีในการทำงานเป็น $n_1, n_2, \cdots, n_m$ วิธีตามลำดับ ดังนั้นวิธีการทำงานที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $n_1 n_2 \cdots n_m$ วิธี

ตัวอย่าง บิตสตริงที่มีความยาวเท่ากับ 8 บิต โดยที่แต่ละบิตจะมีค่าเป็นศูนย์หรือหนึ่งเท่านั้น

ดังนั้นบิตสตริงนี้จะมีทั้งหมด $2^8 = 256$ บิตที่แตกต่างกัน

Counting the Number of Iterations of a Nested Loop

Consider the following nested loop:

```
for i := 1 to 4
    for j := 1 to 3
        [Statements in body of inner loop.
        None contain branching statements
        that lead out of the inner loop.]
    next j
next i
```

How many times will the inner loop be iterated when the algorithm is implemented and run?

Solution The outer loop is iterated four times, and during each iteration of the outer loop, there are three iterations of the inner loop. Hence by the multiplication rule, the total number of iterations of the inner loop is $4 \cdot 3 = 12$. This is illustrated by the trace table below.

i	1	→	→	2	→	→	3	→	→	4	→	→
j	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{3} + \underbrace{\qquad\qquad}_{3} + \underbrace{\qquad\qquad}_{3} + \underbrace{\qquad\qquad}_{3} = 12$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ k เมื่อประมวลผลอัลกอริทึมต่อไปนี้

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    for i_2 := 1 to n_2
            .
            .
            .
        for i_m := 1 to n_m
            k := k + 1
```

ตัวอย่าง จงหาค่าของ k เมื่อประมวลผลอัลกอริทึมต่อไปนี้

<u>วิธีทำ</u> ค่า k เริ่มต้นที่ $k = 0$ อัลกอริทึมประกอบด้วยวงรอบ m วงรอบ

ให้ T_i คือการทำงานของ for $i_i = 1$ to n_i

ดังนั้น

T_m ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_m ดังนั้นค่า $k = n_m$

T_{m-1} ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_m เป็นจำนวน n_{m-1} รอบ ดังนั้น

$$k = \underbrace{n_m + \cdots + n_m}_{n_{m-1}} = n_{m-1}n_m$$

$\vdots$

T_2 ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_m เป็นจำนวน $n_2 n_3 \cdots n_{m-1}$ รอบ ดังนั้นค่า

$$k = n_2 n_3 \cdots n_{m-1} n_m$$

T_1 ⇨ ค่าของ k เพิ่มขึ้น n_m เป็นจำนวน $n_1 n_2 \cdots n_{m-1}$ รอบ ดังนั้นค่า

$$k = n_1 n_2 \cdots n_m$$

ตัวอย่าง รหัสผ่านประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กกับตัวเลขเท่านั้นและจะต้องมีไม่น้อยกว่า 6 ตัวและไม่เกิน 8 ตัว โดยแต่ละรหัสผ่านต้องมีตัวเลขอย่างน้อยหนึ่งตัว จงหาจำนวนรหัสผ่านที่เป็นไปทั้งหมด

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ P แทนจำนวนรหัสผ่านที่เป็นไปทั้งหมดและ P_6, P_7, P_8 แทนจำนวนรหัสผ่านที่มีความยาว $6,7,8$ ตามลำดับ

พิจารณาการหาค่า P_6

จำนวนรหัสผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมดหากรหัสผ่านประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กกับตัวเลขเท่านั้นมีทั้งสิ้น 36^6 $(36 = 26 + 10)$

จำนวนรหัสผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมดหากรหัสผ่านประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กเท่านั้นมีทั้งสิ้น 26^6 ดังนั้น $P_6 = 36^6 - 26^6$

ในทำนองเดียวกัน $P_7 = 36^7 - 26^7$ และ $P_8 = 36^8 - 26^8$

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2,684,483,063,360.$$

ตัวอย่าง

Internet protocol Version 4: IPv4 จะเป็นบิตสตริงที่มีความยาว 32 บิต ซึ่งประกอบด้วยกัน 2 ส่วน คือ “หมายเลขเครือข่าย (Network number, netid)” และ“หมายเลขเครื่อง (Host number, hostid)” โดยจะถูกใช้ในการระบุเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เป็นสมาชิกภายในเครือข่าย

<table>
<tr><td>Bit Number</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>31</td></tr>
<tr><td>Class A</td><td>0</td><td colspan="3">netid</td><td colspan="4">hostid</td></tr>
<tr><td>Class B</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="3">netid</td><td colspan="3">hostid</td></tr>
<tr><td>Class C</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="4">netid</td><td colspan="2">hostid</td></tr>
<tr><td>Class D</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="5">Multicast Address</td></tr>
<tr><td>Class E</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="4">Address</td></tr>
</table>

ตัวอย่าง

Bit Number	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Class A	0	netid				hostid			
Class B	1	0	netid				hostid		
Class C	1	1	0	netid				hostid	
Class D	1	1	1	0	Multicast Address				
Class E	1	1	1	1	0	Address			

ที่อยู่คลาส A (Class A address) ถูกใช้สำหรับเครือข่ายขนาดใหญ่ โดยมีบิตแรกเป็น “0” ต่อด้วย หมายเลขเครือข่าย 7 บิต และต่อด้วยหมายเลขเครื่อง 24 บิต

พิจารณาหมายเลขเครือข่ายของที่อยู่คลาส A ซึ่งหมายเลขเครือข่าย 1111111 จะถูกสงวนไว้มิให้เครือข่ายใดใช้งาน ดังนั้นจำนวนหมายเลขเครือข่ายที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีทั้งสิ้น $2^7 - 1 = 127$ หมายเลข

ตัวอย่าง

Bit Number	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Class A	0	netid				hostid			
Class B	1	0	netid				hostid		
Class C	1	1	0	netid				hostid	
Class D	1	1	1	0	Multicast Address				
Class E	1	1	1	1	0	Address			

พิจารณาหมายเลขเครื่องของที่อยู่คลาส A ซึ่งหมายเลขเครื่องที่ทุกบิตมีค่าเป็นศูนย์หรือหนึ่งทั้งหมดจะถูกสงวนไว้มิให้เครื่องคอมพิวเตอร์ใดใช้งานดังนั้นจำนวนหมายเลขเครื่องที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีทั้งสิ้น 224 – 2 = 16,777,214 หมายเลข

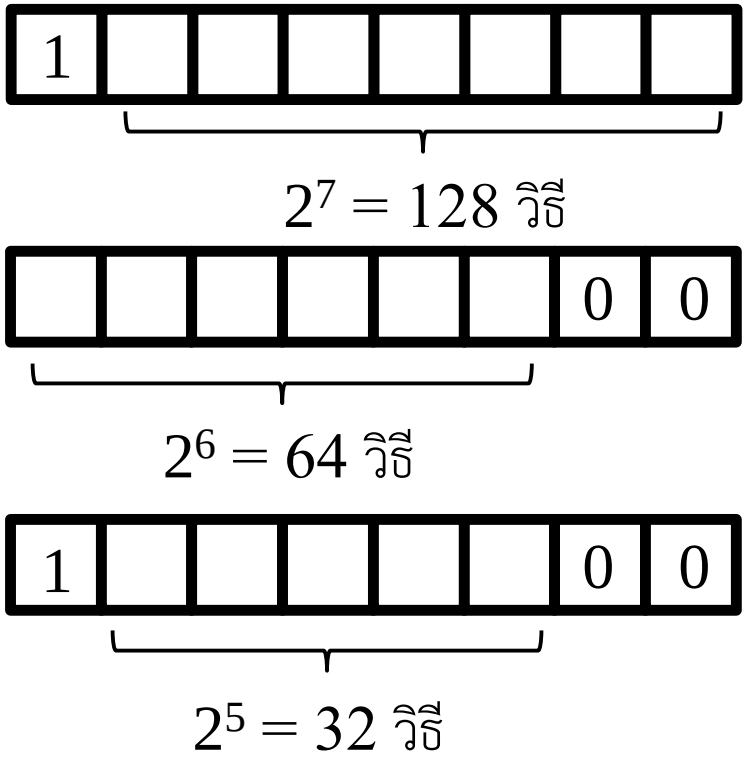
ดังนั้นจำนวนที่อยู่คลาส A ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีทั้งสิ้น 127 x 16,777,214 = 2,130,706,178 หมายเลข

นิยามกฎการหักออก (The Subtraction Rule)

กำหนดให้การทำงานอย่างหนึ่งมีการแบ่งวิธีการทำงานออกเป็น 2 หมวด โดยหมวดแรกมีจำนวนวิธีการทำงาน n_1 วิธี และหมวดที่สองมีจำนวนวิธีการทำงาน n_2 วิธี แล้ว การทำงานนี้จะมีวิธีการทำงานทั้งหมด $n_1 + n_2$ วิธีแล้วนำไปลบด้วยจำนวนวิธีการที่เหมือนกันออกทั้ง 2 หมวด

โดยวิธีการนี้ถูกเรียกว่า “หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก” (Principle of inclusion-exclusion) ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีเซต $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนบิตสตริงขนาด 8 บิตที่เริ่มต้นด้วย 1 หรือ ลงท้ายด้วย 00



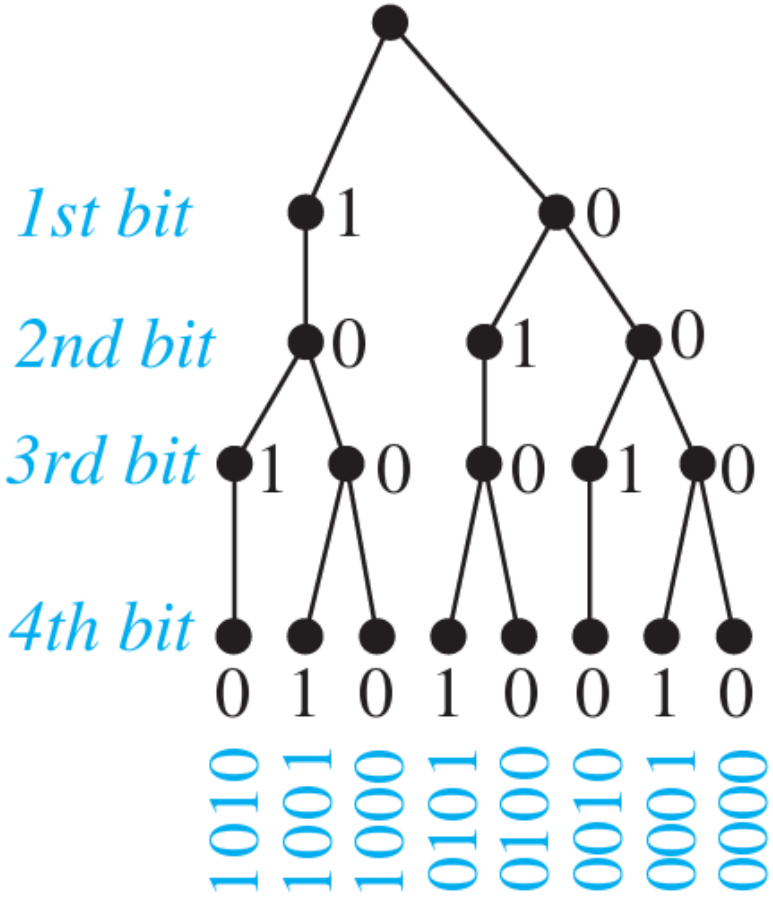
ดังนั้นจากกฎการหักออก จะได้ว่า จำนวนบิตสตริงขนาด 8 บิต ที่เริ่มต้นด้วย 1 หรือลงท้ายด้วย 00 คือ 128 + 64 - 32 = 160

แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)

ปัญหาการนับสามารถแก้ได้ด้วยแผนภาพต้นไม้ (Tree diagram) ซึ่งประกอบด้วย “ราก (Root)” และมีการแตกกิ่งก้านจากรากไปยังจุดอื่นๆ และสามารถแตกกิ่งก้านต่อไปได้อีกเรื่อยๆ ตามต้องการ โดยจุดสิ้นสุดของแต่ละกิ่งก้านจะถูกเรียกว่า “ใบไม้ (leaf)”

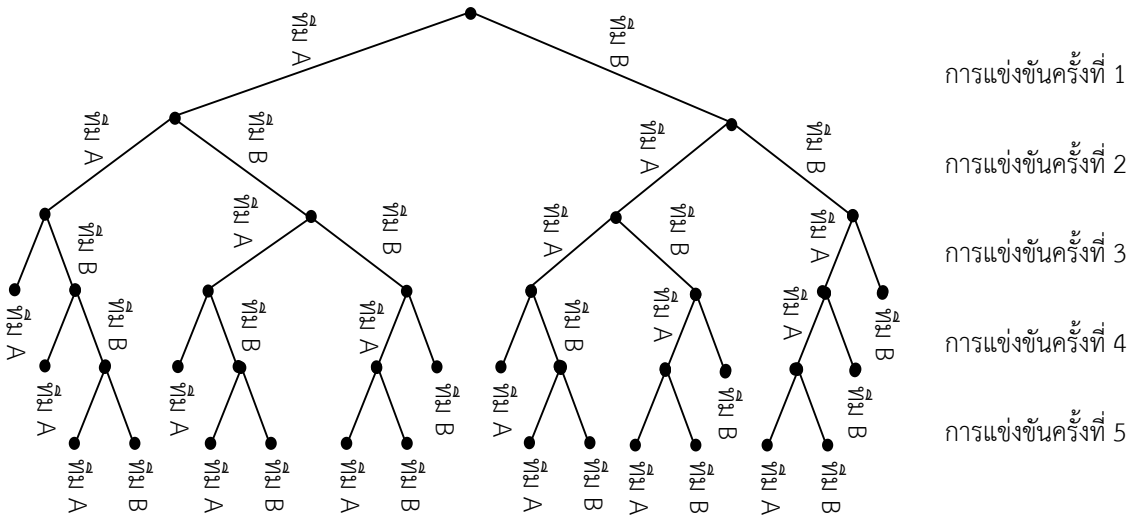
สำหรับการแก้ปัญหาการนับจะใช้การแตกกิ่งก้านแสดงทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยใช้ใบไม้แสดงแทนคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ตัวอย่าง จงหาจำนวนบิตสตริงขนาด 4 บิตที่ไม่มี 1 ติดกันสองบิต



จากแผนภาพต้นไม้จะเห็นได้ว่าจำนวนบิตสตริงขนาด 4 บิตที่ไม่มี 1 ติดกันสองบิตมีทั้งหมด 8 แบบ

ตัวอย่าง จงหาผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการแข่งขันระหว่างทีม A และทีม B ซึ่งการแข่งขันนี้เป็นแบบ 3 ใน 5 ครั้งหมายถึง ทีมไหนชนะ ครั้งก่อนจะเป็นผู้ชนะการแข่งขันนี้และการแข่งขันจะมีมากที่สุดไม่เกิน 5 ครั้ง



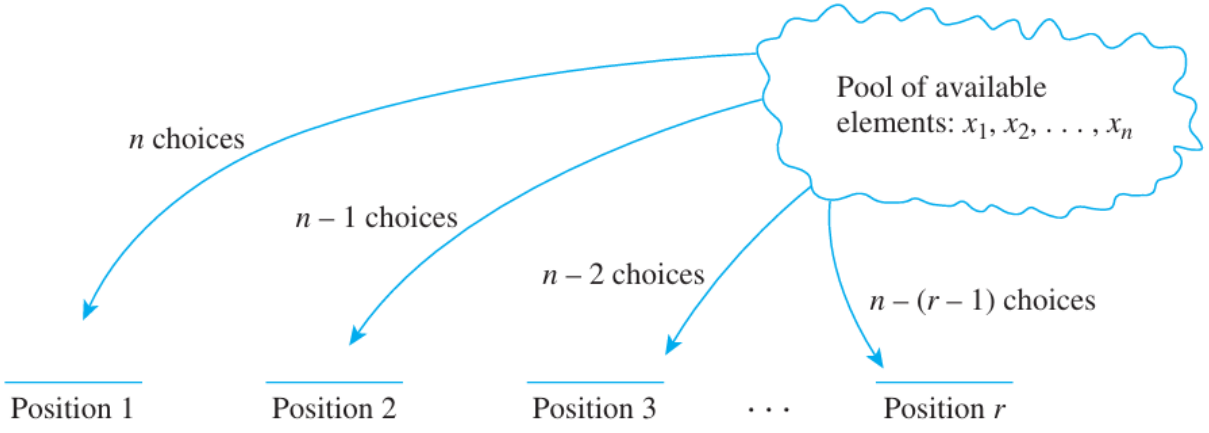
จากแผนภาพต้นไม้จะเห็นได้ว่าผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการแข่งขันระหว่างทีม A และทีม B มีทั้งหมด 20 แบบ

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ (Permutation and combination)

ปัญหาการนับหลายๆปัญหานั้นลำดับของสิ่งที่นับอาจจะไม่มีความสำคัญ ในทางกลับกันปัญหาการนับจำนวนไม่น้อยเช่นเดียวกันที่ลำดับของสิ่งที่นับมีความสำคัญอย่างยิ่ง ดังนั้นการพัฒนาแนวทางในการแก้ปัญหาพื้นฐานทั้งสองนี้เป็นเทคนิคหนึ่งที่ถูกใช้ในการแก้ปัญหาการนับอย่างแพร่หลาย

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations)

ของสมาชิกที่มีความแตกต่างกันภายในเซตที่สนใจหมายถึง การจัดเรียงลำดับของสมาชิกเหล่านี้ โดยการจัดเรียงอาจจะไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับของสมาชิกทั้งหมดของเซต โดยการเรียงสับเปลี่ยนเพียง *r* สมาชิกของเซตทั้งหมด จะเรียกวิธีการนี้ว่า “การเรียงสับเปลี่ยนของ *r* สิ่ง (*r*-permutation)”

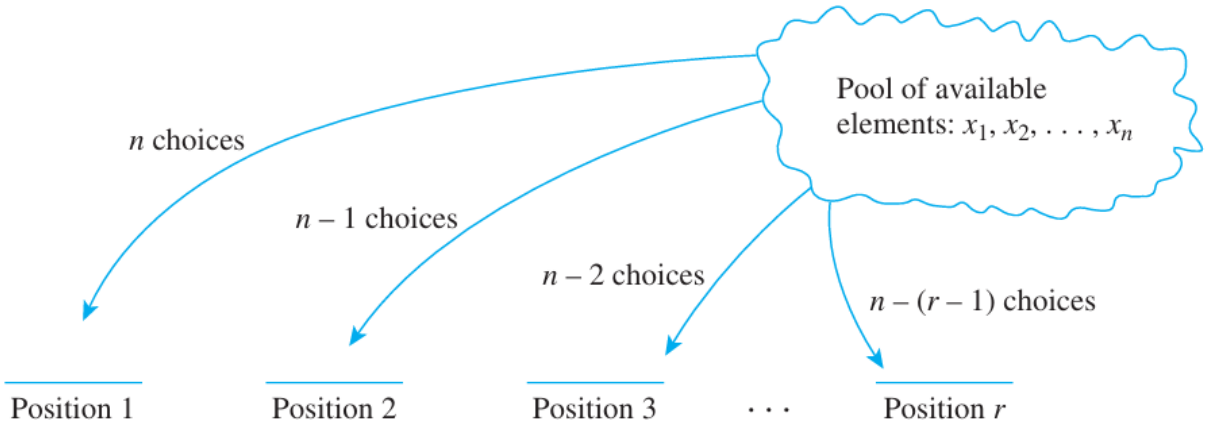


ทฤษฎีบท การเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่ง (r-permutation)

กำหนดให้ $n \in \mathbf{Z}^+, r \in \mathbf{Z}$ และ $1 \le r \le n$ แล้ว การเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่ง (r-permutation) ของเซตที่มีจำนวน n สิ่ง

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations)



$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Note that

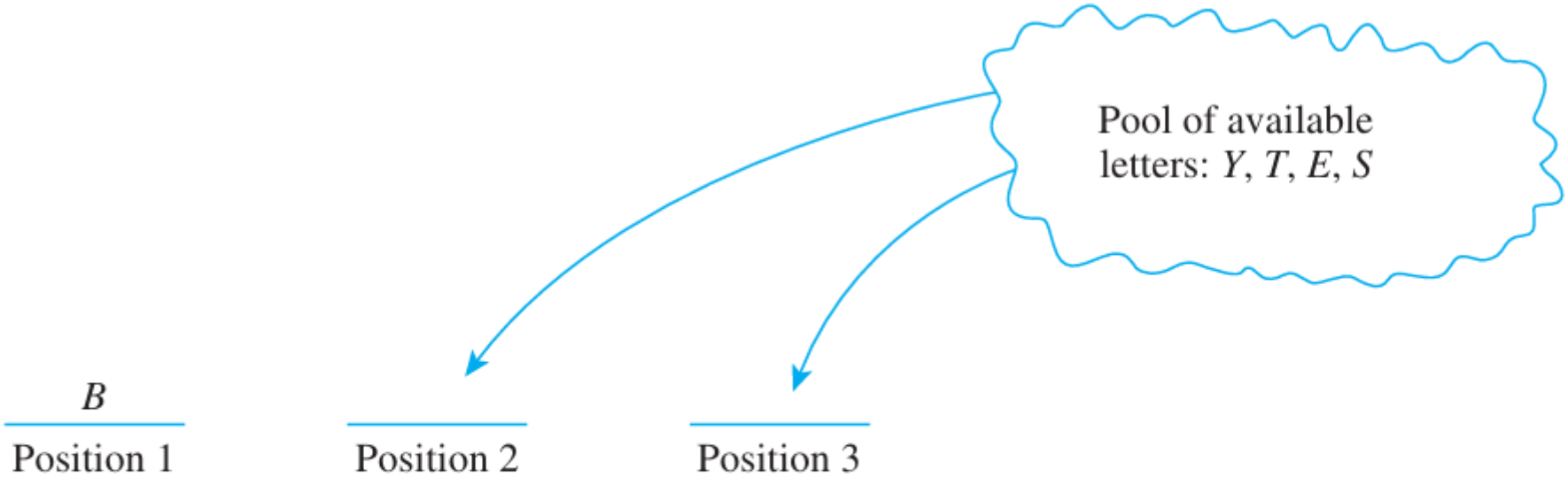
$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cancel{(n-r)}\cancel{(n-r-1)}\cdots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{(n-r)}\cancel{(n-r-1)}\cdots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

How many different ways can three of the letters of the word BYTES be chosen and written in a row?

The answer equals the number of 3-permutations of a set of five elements. This equals

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{2}\cdot \cancel{1}} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$$

How many different ways can this be done if the first letter must be B?



Hence the answer is the number of 2-permutations of a set of four elements, which is

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4 \cdot 3 = 12. \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงนักศึกษา 3 คนจากนักศึกษาทั้งหมด 5 คนเพื่อทำการถ่ายภาพ

สำหรับการเลือกนักศึกษามายืนในตำแหน่งซ้ายสุดของการถ่ายภาพจะสามารถเลือกทั้งหมด 5 วิธี (นักศึกษามีทั้งหมด 5 คน)

ดังนั้นการเลือกนักศึกษามายืนในตำแหน่งตรงกลางของการถ่ายภาพจะเหลือเลือกทั้งหมด 4 วิธี (นักศึกษามีทั้งหมด 5 คน ถูกเลือกไปแล้ว 1 คน)

และการเลือกนักศึกษามายืนในตำแหน่งขวาสุดของการถ่ายภาพจะเหลือเลือกทั้งหมด 3 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดเรียงนักศึกษา 3 คนจากนักศึกษาทั้งหมด 5 คนเพื่อทำการถ่ายภาพจะมีทั้งสิ้น $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

ตัวอย่าง กำหนดให้ $S = \{a, b, c\}$ จงหาจำนวนวิธีในการเรียงลำดับสมาชิกเพียง 2 ลำดับในเซต S

<u>คำตอบ</u> คำตอบที่เป็นไปทั้งหมดคือ $\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าคำตอบ (a,b) และ (b,a) ถือเป็นคำตอบที่ต่างกัน เนื่องจากลำดับของคำตอบมีความสำคัญและหากใช้สูตรคำนวณของการเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่งจะได้ $P(3,2) = 3(2) = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

ตัวอย่าง สมมุติว่ามีนักกีฬาทั้งหมด 8 คน ผู้ชนะอันดับที่หนึ่งจะได้เหรียญทอง ผู้ชนะอันดับที่สองจะได้เหรียญเงินและผู้ชนะอันดับที่สามจะได้เหรียญทองแดง จงหาจำนวนวิธีในการให้เหรียญรางวัลแก่นักกีฬาที่เป็นไปได้ทั้งหมด

<u>คำตอบ</u> จำนวนวิธีในการให้เหรียญรางวัลคือ การเรียงสับเปลี่ยนของ 3 สิ่งจาก 8 สิ่ง

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

ตัวอย่าง สมมุติว่ามีพนักงานขายต้องไปพบลูกค้าในสถานที่ 8 แห่งโดยจะเริ่มเดินทางไปยังสถานที่ใกล้ที่สุดเป็นที่แรกแล้วค่อยเดินทางไปที่อื่น จงหาลำดับการเดินทางของพนักงานขายคนนี้ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เนื่องจากสถานที่แรกของพนักงานขายคนนี้ได้ถูกระบุไว้แล้ว (สถานที่ใกล้ที่สุด) ดังนั้นจะเหลือสถานที่ให้เรียงสับเปลี่ยนเพียง 7 แห่งและจะได้ลำดับการเดินทางของพนักงานขายคนนี้ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $7! = 5040$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของอักษร ABCDEFGH ที่ประกอบ ABC

เนื่องจาก ABC ถูกระบุว่าจะต้องเป็นส่วนหนึ่งของการเรียงสับเปลี่ยน ดังนั้นจะพิจารณา ABC เป็นเพียงหนึ่งสิ่งและเมื่อรวมกับ D,E,F,G และ H จะเป็น 6 สิ่ง ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของอักษร ABCDEFGH ที่ประกอบ ABC คือ $6! = 720$

การจัดหมู่ (Combinations)

หมายถึง การเลือกสมาชิกภายในเซตที่สนใจโดยมิได้สนใจลำดับ โดย “การจัดหมู่ของ *r* สิ่ง (*r*-combination)” คือ การเลือกสมาชิก *r* สิ่งภายในเซตโดยมิได้สนใจลำดับของสิ่งที่เลือก

ทฤษฎีบท การจัดหมู่ r สิ่ง (r-combination)

กำหนดให้ $n \in \mathbf{Z}^{+}, r \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le r \le n$ แล้ว "การจัดหมู่ r สิ่ง (r-combination)" คือ

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

3-Combinations

Let $S = \{\text{Ann, Bob, Cyd, Dan}\}$. Each committee consisting of three of the four people in S is a 3-combination of S.

a. List all such 3-combinations of S. b. What is $\binom{4}{3}$?

Solution

a. Each 3-combination of S is a subset of S of size 3. But each subset of size 3 can be obtained by leaving out one of the elements of S. The 3-combinations are

{Bob, Cyd, Dan}	leave out Ann
{Ann, Cyd, Dan}	leave out Bob
{Ann, Bob, Dan}	leave out Cyd
{Ann, Bob, Cyd}	leave out Dan.

b. Because $\binom{4}{3}$ is the number of 3-combinations of a set with four elements, by part (a), $\binom{4}{3} = 4$. ■

ตัวอย่าง จงหาจำนวนวิธีการจัดกรรมการที่เป็นนักศึกษา 3 คนจากนักศึกษา 4 คน

<u>คำตอบ</u> การเลือกโดยไม่สนใจลำดับของนักศึกษา 3 คนจากนักศึกษา 4 คน คือ $C(4,3)=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4$ ซึ่งหากพิจารณาปัญหานี้ในอีกลักษณะหนึ่งเป็นการเลือกนักศึกษาออก 1 คนจากนักศึกษา 4 คน คือ $C(4,1)=\frac{4!}{1!(4-1)!}=4$ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน

Relation between Permutations and Combinations

Write all 2-permutations of the set $\{0, 1, 2, 3\}$. Find an equation relating the number of 2-permutations, $P(4, 2)$, and the number of 2-combinations, $\binom{4}{2}$, and solve this equation for $\binom{4}{2}$.

Solution According to Theorem 9.2.3, the number of 2-permutations of the set $\{0, 1, 2, 3\}$ is $P(4, 2)$, which equals

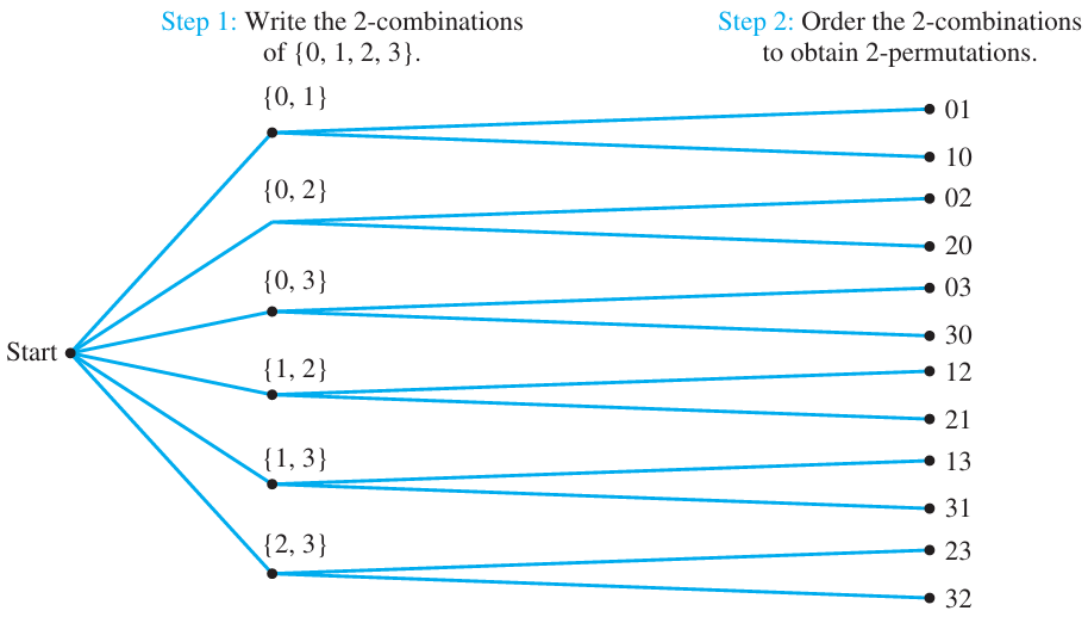
$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 12.$$

Now the act of constructing a 2-permutation of $\{0, 1, 2, 3\}$ can be thought of as a two-step process:

Step 1: Choose a subset of two elements from $\{0, 1, 2, 3\}$.

Step 2: Choose an ordering for the two-element subset.

Relation between Permutations and Combinations



$$P(4, 2) = \binom{4}{2} \cdot 2!.$$ This is an equation that relates $P(4, 2)$ and $\binom{4}{2}$.

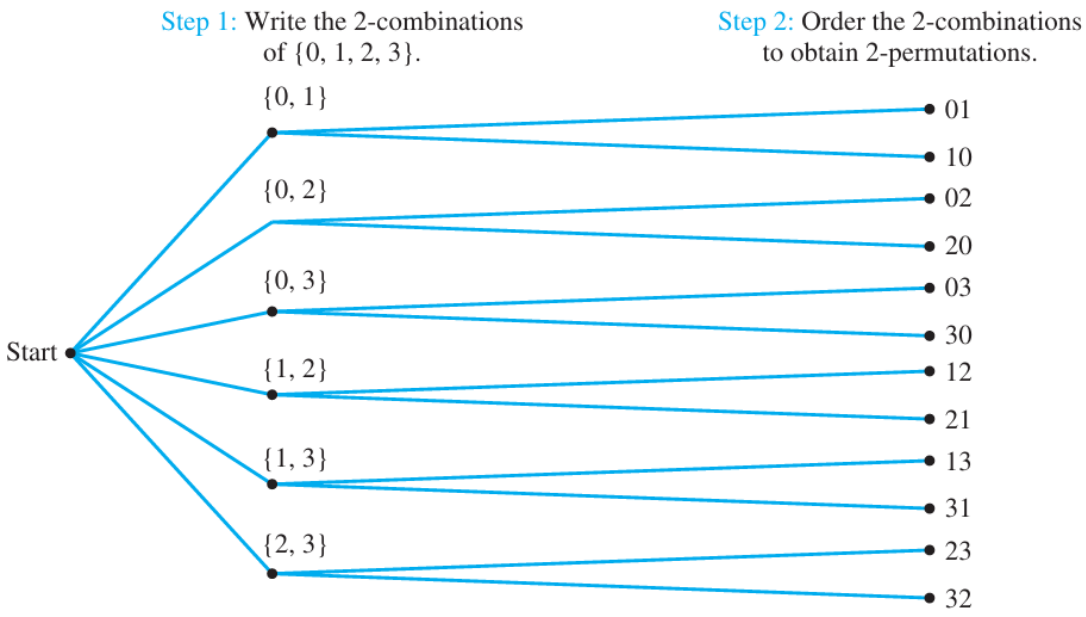
Solving the equation for $\binom{4}{2}$ gives

$$\binom{4}{2} = \frac{P(4, 2)}{2!}$$

Recall that $P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!}$. Hence, substituting yields

$$\binom{4}{2} = \frac{\frac{4!}{(4-2)!}}{2!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Relation between Permutations and Combinations



$$P(n, r) = \binom{n}{r} \cdot r!.$$

Now solve for $\binom{n}{r}$ to obtain the formula

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!}.$$

Since $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, substitution gives

$$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $S = \{a,b,c,d\}$ จงหาจำนวนวิธีในการเรียงลำดับสมาชิกเพียง 2 ลำดับในเซต S

<u>คำตอบ</u> คำตอบที่เป็นไปทั้งหมดคือ $\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$ โดยลักษณะของคำตอบ เช่น (a,b) และ (b,a) ถือเป็นคำตอบที่เหมือนกัน เนื่องจากลำดับของคำตอบไม่มีความสำคัญ และหากใช้สูตรคำนวณของการจัดหมู่ของ r สิ่งจะได้

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!2!} = 6$$

บทแทรก

กำหนดให้ $n \in \mathbf{Z}^{+}, r \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le r \le n$ แล้ว

$$P(n,r) = C(n,r)P(r,r)$$

<u>พิสูจน์</u>

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{\dfrac{r!}{(r-r)!}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง ในการเล่นไพ่โป๊กเกอร์ จะใช้ไพ่หนึ่งสำรับที่มีทั้งหมด 52 ใบ โดยจะแจกให้ผู้เล่นแต่ละคน คนละ 5 ใบ จงหาวิธีการแจกไพ่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับผู้เล่นหนึ่งคน

<u>คำตอบ</u> การเลือกโดยไม่สนใจลำดับของไพ่โป๊กเกอร์ 5 ใบจากทั้งหมด 52 ใบ คือ

$$C(52,5)=\frac{52!}{5!(52-5)!}=\frac{52!}{5!47!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 47!}=2{,}598{,}960$$ แบบ ซึ่งหากพิจารณาปัญหานี้ในอีกลักษณะหนึ่งเป็นการเลือกไพ่โป๊กเกอร์ 47 ออกจากทั้งหมด 52 ใบ คือ

$$C(52,47)=\frac{52!}{47!(52-47)!}=\frac{52!}{47!5!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 47!}=2{,}598{,}960$$ แบบ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน

บทแทรก

กำหนดให้ $n \in \mathbf{Z}^{+}, r \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le r \le n$ แล้ว

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

<u>พิสูจน์</u>

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง หากทีมกีฬาหนึ่งมีนักกีฬาทั้งหมด 10 คน จงหาวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการเลือกนักกีฬา 5 คนของทีมเพื่อไปลงแข่งขันกระชับมิตรกับทีมจากต่างประเทศ

<u>คำตอบ</u> การเลือกนักกีฬา 5 คนจากทั้งหมด 10 คน คือ

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} = 252 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง มีนักศึกษา 30 คนเข้าอบรมการเป็นนักบินอวกาศเพื่อการปฏิบัติงานแรกบนดวงจันทร์ จงหาวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการเลือกนักศึกษา 6 คนเพื่อเป็นนักบินอวกาศ

<u>คำตอบ</u> การเลือกนักศึกษา 6 คนจากทั้งหมด 30 คน คือ

$$C(30,6) = \frac{30!}{6!(30-6)!} = \frac{30!}{5!24!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 593,775 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง สมมุติให้บุคลกรในภาควิชาคณิตศาสตร์ 9 คนเป็นสมาชิกของคณะและบุคลกรในภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ 11 คนเป็นสมาชิกของคณะ จงหาวิธีการที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการแต่งตั้งกรรมการของกระบวนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง โดยที่มีข้อกำหนดว่ากรรมการทุกคนจะต้องเป็นสมาชิกของคณะและจะต้องมาจากภาควิชาคณิตศาสตร์ 3 คนและภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ 4 คน

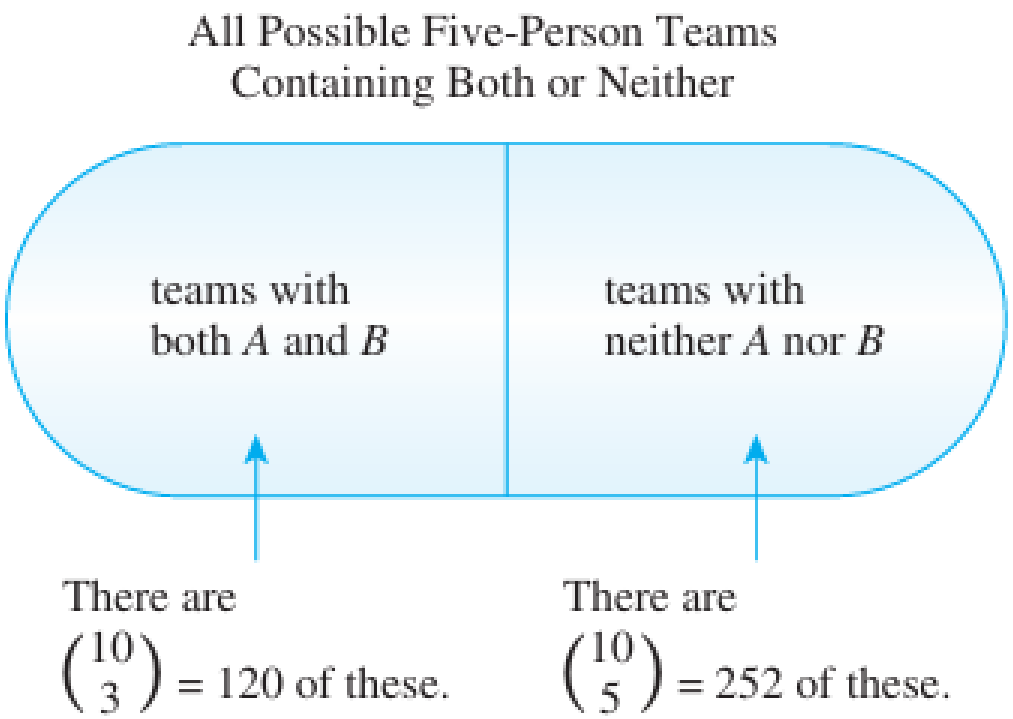
<u>คำตอบ</u> การแก้ปัญหานี้แบ่งเป็นสองส่วนคือ การแต่งตั้งกรรมการ 3 คนจากบุตลากรภาควิชาคณิตศาสตร์และสมาชิกของคณะทั้งหมด 9 คนและการแต่งตั้งกรรมการ 3 คนจากบุตลากรภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสมาชิกของคณะทั้งหมด 11 คน และจากกฎผลคูณ จะได้

$$C(9,3)\cdot C(11,4)=\frac{9!}{3!6!}\frac{11!}{4!7!}=27,720 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง เลือกสมาชิก 5 คนจากกลุ่มที่มี 12 คน เพื่อมาทำงานเป็นทีม จะสามารถเลือกทีมที่มีสมาชิก 5 คนที่แตกต่างกันได้กี่ทีม?

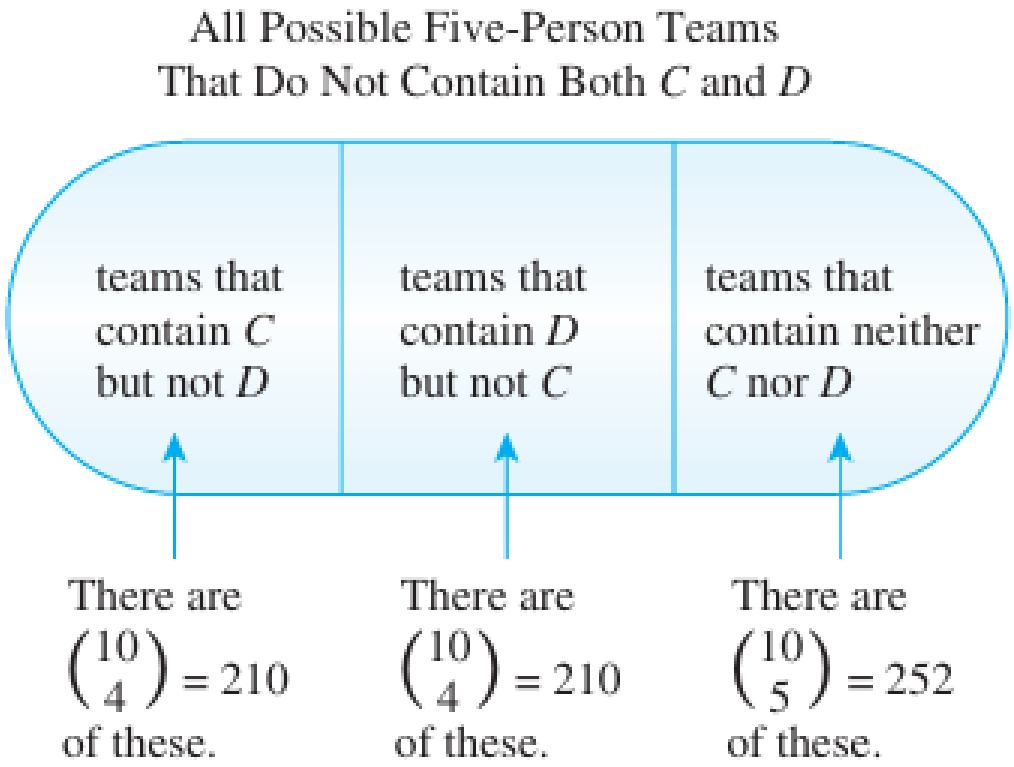
$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{(\cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1)\cdot \cancel{7!}} = 11\cdot 9\cdot 8 = 792.$$

ตัวอย่าง สมมติว่าสมาชิก 2 คนจากกลุ่ม 12 คน ยืนยันว่าจะต้องทำงานเป็นคู่เสมอ หมายความว่าทีมใด ๆ จะต้องมีทั้งสองคนนี้อยู่ด้วยพร้อมกัน หรือไม่ก็ไม่มีเลย แล้วจะสามารถจัดทีมที่มีสมาชิก 5 คนได้กี่ทีม?



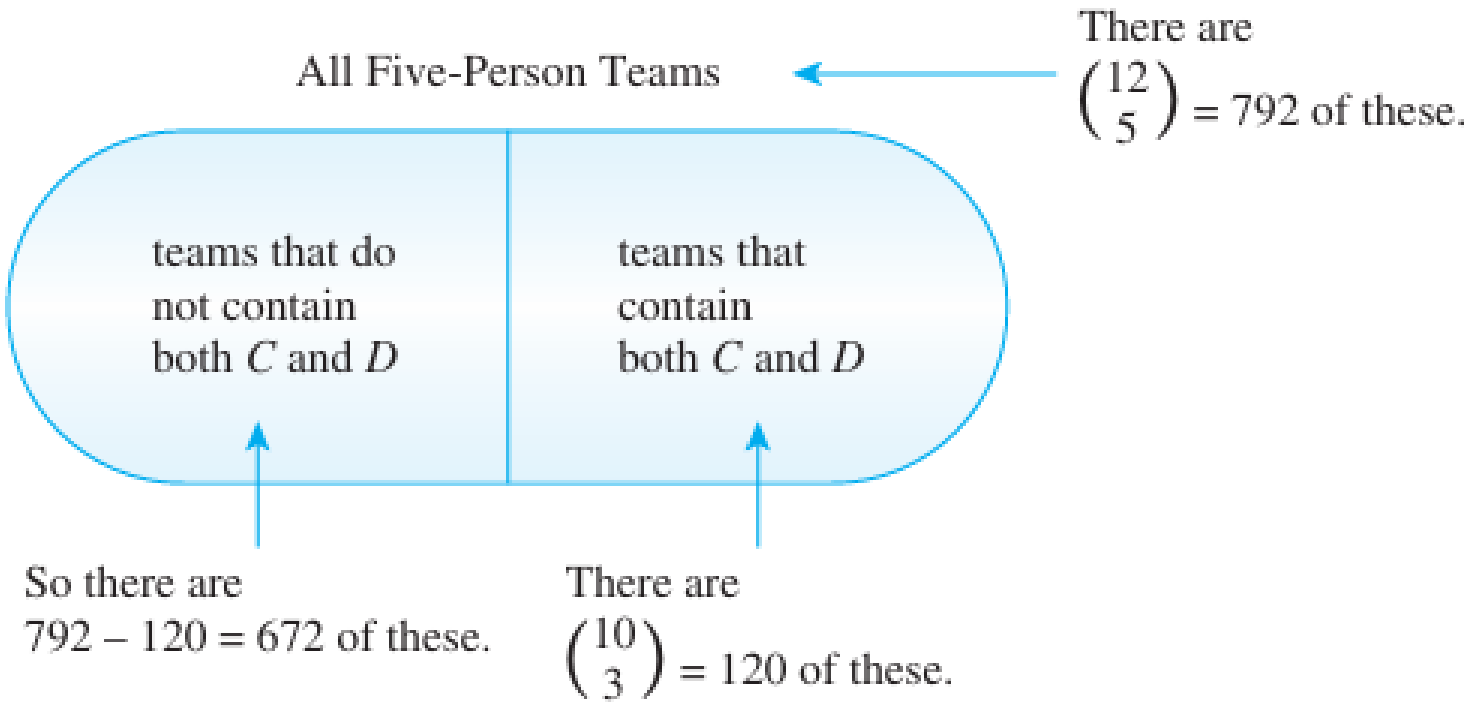
So the total number of teams that contain either both A and B or neither A nor B is $120 + 252 = 372$.

ตัวอย่าง สมมติว่าสมาชิก 2 คนในกลุ่มไม่ถูกกัน และปฏิเสธที่จะทำงานร่วมกันในทีม จะสามารถจัดทีมที่มีสมาชิก 5 คนได้กี่ทีม?



So the total number of teams that do not contain both C and D is $210 + 210 + 252 = 672$.

ตัวอย่าง สมมติว่าสมาชิก 2 คนในกลุ่มไม่ถูกกัน และปฏิเสธที่จะทำงานร่วมกันในทีม จะสามารถจัดทีมที่มีสมาชิก 5 คนได้กี่ทีม?



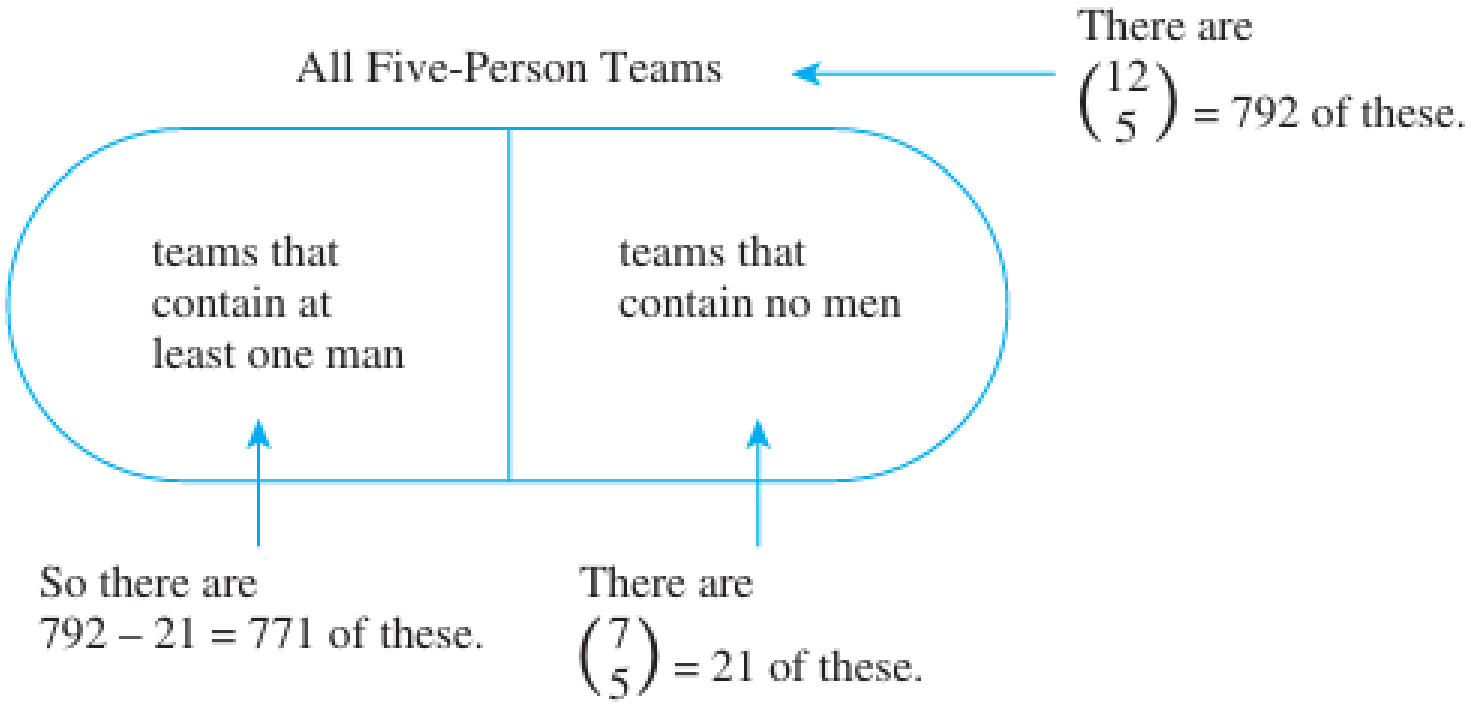
ตัวอย่าง สมมติว่ากลุ่มคน 12 คนนี้ประกอบด้วยผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 7 คน สามารถเลือกทีมที่ประกอบด้วยผู้ชาย 3 คน และผู้หญิง 2 คน ได้กี่ทีม?

$$\begin{bmatrix}\text{number of teams of five that}\\ \text{contain three men and two women}\end{bmatrix} = \binom{5}{3}\binom{7}{2} = \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{7!}{2!5!}$$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1}$$

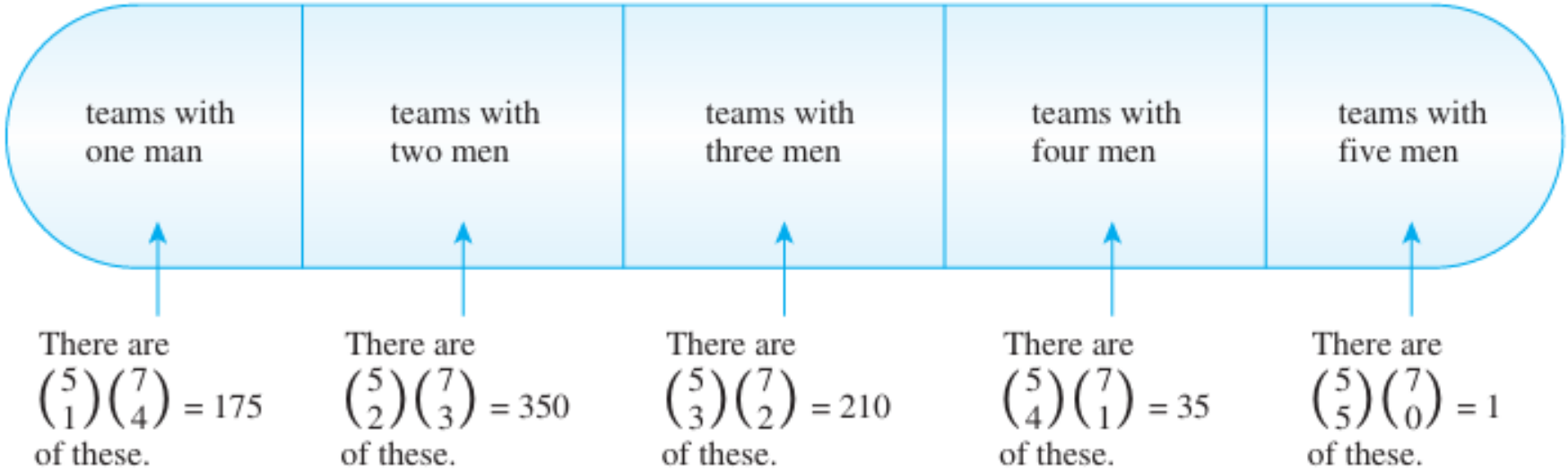
$$= 210.$$

ตัวอย่าง สมมติว่ากลุ่มคน 12 คนนี้ประกอบด้วยผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 7 คน มีกี่วิธีในการจัดทีมสมาชิก 5 คน โดยที่ในทีมนั้นต้องมีผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน?



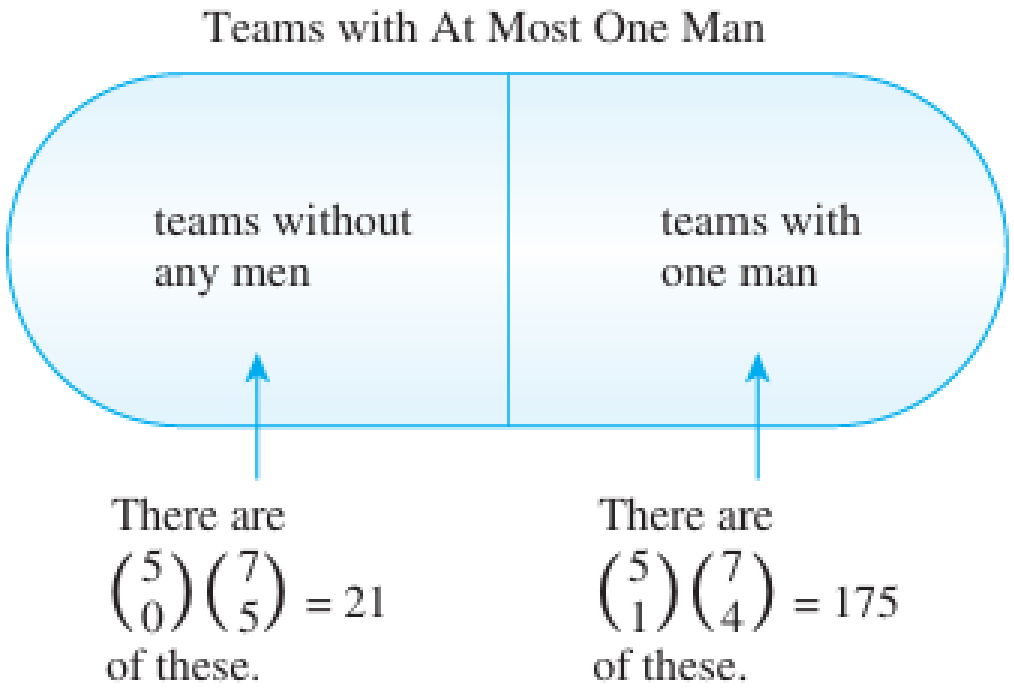
ตัวอย่าง สมมติว่ากลุ่มคน 12 คนนี้ประกอบด้วยผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 7 คน มีกี่วิธีในการจัดทีมสมาชิก 5 คน โดยที่ในทีมนั้นต้องมีผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน?

Teams with At Least One Man



So the total number of teams with at least one man is $175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771$.

ตัวอย่าง สมมติว่ากลุ่มคน 12 คนนี้ประกอบด้วยผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 7 คน มีกี่วิธีในการจัดทีมสมาชิก 5 คน โดยที่ในทีมนั้นมีผู้ชายไม่เกินหนึ่งคน?



So the total number of teams with at most one man is $21 + 175 = 196$.

3. ทฤษฎีบททวินาม (The Binomial Theorem)

ใช้สำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์ของการขยายการยกกำลังของนิพจน์ทวินาม

นิพจน์ทวินาม (Binomial Expression) หมายถึง ผลบวกของสองพจน์ เช่น $x+y$ (โดยที่แต่ละพจน์อาจเป็นผลคูณของค่าคงที่และตัวแปร)

ตัวอย่าง The expansion of $(x + y)^3$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) = (xx+xy+yx+yy)(x+y) \\
&= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{aligned}
$$

Powers of a + b

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb, \\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb, \\
(a+b)^4 &= \underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{1st}\\\text{factor}}}\underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{2nd}\\\text{factor}}}\underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{3rd}\\\text{factor}}}\underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{4th}\\\text{factor}}} \\
&= aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + abab + abba + abbb \\
&\qquad + baaa + baab + baba + babb + bbaa + bbab + bbba + bbbb.
\end{aligned}
$$

Powers of a + b

$$aaab \quad aaba \quad abaa \quad baaa.$$

By the commutative and associative laws of algebra, each such term equals a^3b, so all four are "like terms." When the like terms are combined, therefore, the coefficient of a^3b equals $\binom{4}{1}$.

Similarly, the expansion of $(a+b)^4$ contains the $\binom{4}{2} = 6$ different orderings of two a's and two b's,

$$aabb \quad abab \quad abba \quad baab \quad baba \quad bbaa,$$

Powers of a + b

all of which equal a^2b^2, so the coefficient of a^2b^2 equals $\binom{4}{2}$. By a similar analysis, the coefficient of ab^3 equals $\binom{4}{3}$. Also, since there is only one way to order four a's, the coefficient of a^4 is 1 (which equals $\binom{4}{0}$, and since there is only one way to order four b's, the coefficient of b^4 is 1 (which equals $\binom{4}{4}$). Thus, when all of the like terms are combined,

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

THE BINOMIAL THEOREM Let x and y be variables, and let n be a nonnegative integer. Then

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

ตัวอย่าง The expansion of $(x + y)^4$

Solution: From the binomial theorem it follows that

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j \\
&= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\
&= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.
\end{aligned}
$$

What is the coefficient of $x^{12}y^{13}$ in the expansion of $(x+y)^{25}$?

Solution: From the binomial theorem it follows that this coefficient is

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5{,}200{,}300.$$

What is the coefficient of $x^{12}y^{13}$ in the expansion of $(2x - 3y)^{25}$?

Solution: First, note that this expression equals $(2x + (-3y))^{25}$. By the binomial theorem, we have

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j}(-3y)^j.$$

Consequently, the coefficient of $x^{12}y^{13}$ in the expansion is obtained when $j = 13$, namely,

$$\binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12}3^{13}.$$

Pascal's Identity and Triangle

PASCAL'S IDENTITY Let n and k be positive integers with $n \geq k$. Then

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Pascal’s Identity and Triangle

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$

$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$

$$\cdots$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\cdots$

Pascal's Identity and Triangle

$n \backslash r$	0	1	2		3	4	5	$\cdots$	$r-1$		r	$\cdots$
0	1								.		.	$\cdots$
1	1	1							.		.	$\cdots$
2	1	2	1						.		.	$\cdots$
3	1	3	3		1				.		.	$\cdots$
4	1	4	6	+	4	1			.		.	$\cdots$
5	1	5	10	=	10	5	1		.		.	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots\vdots\vdots$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$		$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\cdots$	$\binom{n}{r-1}$	+	$\binom{n}{r}$	$\cdots$
$n+1$	$\binom{n+1}{0}$	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$		$\binom{n+1}{3}$	$\binom{n+1}{4}$	$\binom{n+1}{5}$	$\cdots$		=	$\binom{n+1}{r}$	$\cdots$
.		.	.		.	.	.		.		.	$\cdots$
.		.	.		.	.	.		.		.	$\cdots$
.		.	.		.	.	.		.		.	$\cdots$

Theorem 9.7.1 Pascal's Formula

Let n and r be positive integers and suppose $r \leq n$. Then

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

Proof (algebraic version):

Let n and r be positive integers with $r \leq n$. By Theorem 9.5.1,

$$\begin{aligned}\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}.\end{aligned}$$

To add these fractions, a common denominator is needed, so multiply the numerator and denominator of the left-hand fraction by r and multiply the numerator and denominator of the right-hand fraction by $(n - r + 1)$. Then

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \cdot \frac{r}{r} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)} \\
&= \frac{n! \cdot r}{(n-r+1)!r(r-1)!} + \frac{n \cdot n! - n! \cdot r + n!}{(n-r+1)(n-r)!r!} \\
&= \frac{\cancel{n! \cdot r} + n! \cdot n - \cancel{n! \cdot r} + n!}{(n-r+1)!r!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-r)!r!} \\
&= \frac{(n+1)!}{((n+1)-r)!r!} = \binom{n+1}{r}.
\end{aligned}$$

Let n be a nonnegative integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Proof: Using the binomial theorem with $x = 1$ and $y = 1$, we see that

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

This is the desired result. $\triangleleft$

Let n be a positive integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Proof: When we use the binomial theorem with $x = -1$ and $y = 1$, we see that

$$0 = 0^n = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$